Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

Bekir DİZDAROĞLU
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

www.bekirdizdaroglu.com

21. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı
Acapulco Hotel, Girne
Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti
24-26 Nisan 2013

Karmaşık Sayılar

$I \in L_2(\mathbb{C})$ karmaşık düzlemde tanımlı gri düzeyli bir imgeyi göstersin ve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gerçel kartezyen koordinatlarda I imgesinin pikselleri $I(z)$ ile temsil edilsin, burada $z = x + \mathbf{i}y$ ve eşleniği $\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ olarak alınır.

$$f(z) = f(x + \mathbf{i}y) = \Re(f) + \mathbf{i}\Im(f) \qquad x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Karmaşık Sayılar

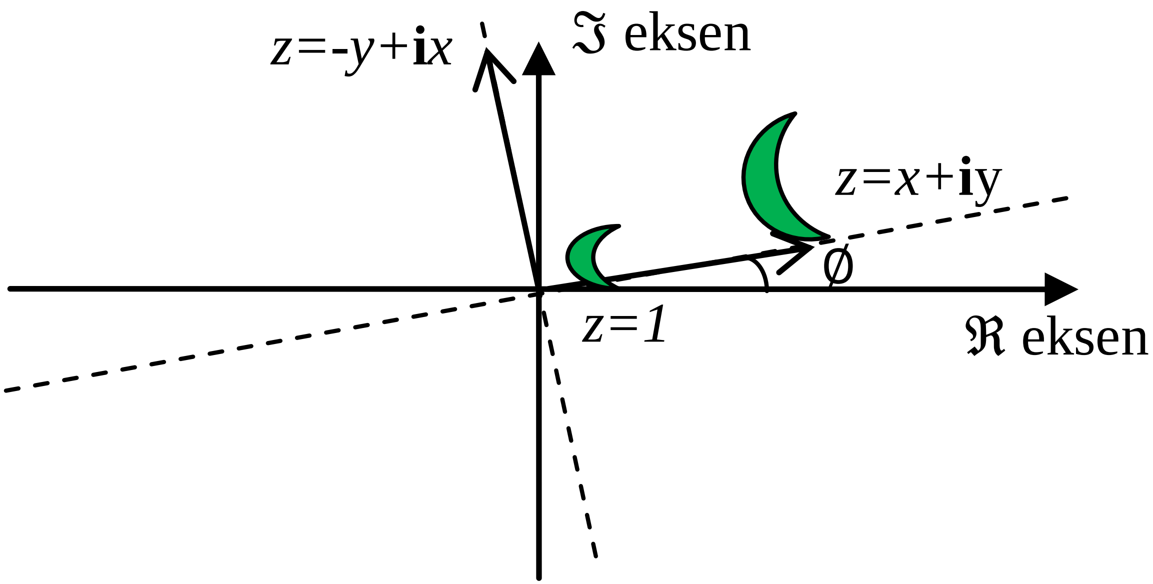
- Kuvvet serisi yaklaşımı

$$f(z,\bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^j\,\bar{z}^l}{j!\,l!}\left(\partial_z^j\partial_{\bar{z}}^l f\right)(0)$$

Karmaşık Sayılar

- Karmaşık sayılar, deformasyon (biçim bozulması) işlemini gerçekleştirmekten başka bir şey değildir.
- "Döndürme, öteleme ve ölçekleme işlemlerini yapar" diye bir tanımlama getirilebilir.

Karmaşık Sayılar

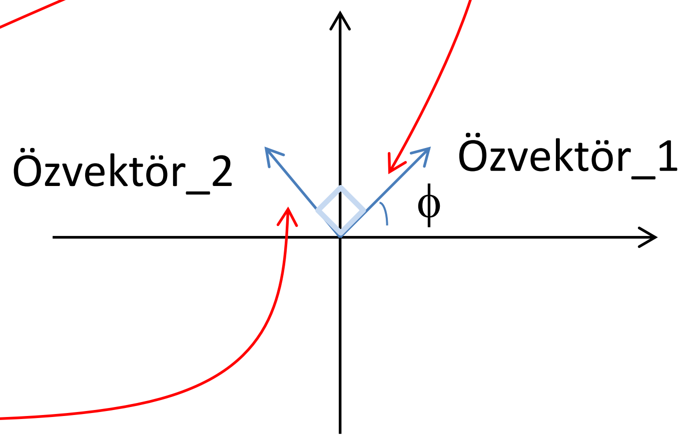


Bir nesnenin karmaşık sayı düzleminde deformasyona uğratılması: Nesne, saat yönünün tersinde $\emptyset = \tan^{-1}(y/x)$ açısına bağlı olarak döndürülmüş, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ değerine göre de ötelenmiş ve ölçeklenmiştir

Karmaşık Sayılar

- **Döndürme**

$$R(\emptyset) = \begin{bmatrix} \cos\emptyset & \sin\emptyset \\ -\sin\emptyset & \cos\emptyset \end{bmatrix}$$



$$x\cos\emptyset + y\sin\emptyset + \mathbf{i}\,(-\,x\sin\emptyset + y\cos\emptyset) =$$

$$(\cos\emptyset - \mathbf{i}\sin\emptyset)\,z = e^{-\mathbf{i}\emptyset}z$$

$$e^{\mathbf{i}\emptyset}\,\bar{z}$$

z karmaşık sayı eşleniğinin ϕ açısıyla döndürülmesi

Karmaşık Sayılar

- Gri düzeyli bir imgeyi döndürdüğümüzde aşağıdaki eşitlik verilebilir:

$$(g_{\emptyset} I)(z) = I\left(e^{-\mathbf{i}\emptyset} z\right)$$

- Gri düzeyli bir imgenin (i,j). karmaşık türevi:

$$(g_{\emptyset} f)(z) = \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^l (g_{\emptyset} I)(z) = e^{-\mathbf{i}\emptyset(j-l)} f(e^{-\mathbf{i}\emptyset} z)$$

$$f = \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^l I$$

Karmaşık Sayılar

- i=j=1 alınırsa,

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} I = 1/2\ \times (\partial I/\partial x - \mathbf{i}\,\partial I/\partial y)\,1/2 \times (\partial I/\partial x + \mathbf{i}\,\partial I/\partial y)$$
$$= \left(\partial^2 I/\partial_x^2 + \partial^2 I/\partial_y^2\right)/4 = \left(I_{xx} + I_{yy}\right)/4$$
$$= \Delta I/4$$

Laplace işleci (Isı denklemi)->Alçak Geçiren Süzgeç Davranışı gösterir

Karmaşık Sayılar

- Öteleme

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} z^j/j! \qquad e^{u\partial_z} f(z) = f(z+u)$$

$$T_u = e^{u\partial_z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \partial_z^j \text{ ve } \bar{T}_{\bar{u}} = e^{\bar{u}\partial_{\bar{z}}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bar{u}^j}{j!} \partial_{\bar{z}}^j$$

- f karmaşık fonksiyonunu öteleme

$$T_u \bar{T}_{\bar{u}} f(z, \bar{z}) = f(z+u, \bar{z}+\bar{u})$$

Gauss Fonksiyonu

- Gauss Fonksiyonunun Karmaşık Türevi:

$$\partial_z^j e^{-(x^2+y^2)} = \partial_z^j e^{-z\bar{z}} = (-\bar{z})^j e^{-z\bar{z}}$$

- Türev alma işlemi karmaşık değerli değişkenlerin birbirinden bağımsız olmasıyla gerçekleştirilmektedir.

Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

- Karmaşık süzgeç:

$$F_{\emptyset}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j(\emptyset)\, k_j(z)$$

$$\beta_j(\emptyset) = e^{\mathbf{i}\emptyset\vartheta_j} \qquad\qquad k_j(z)$$

Yön bağımlı ağırlık katsayıları

Döndürme yönünden bağımsız temel süzgeçler

Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

- Gri düzeyli imgeyi karmaşık süzgeçle katlama

$$(F_{\emptyset} * I)(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j(\emptyset)\left(k_j * I\right)(z)$$

- Karmaşık türev alma işlemine dayalı yönlendirilebilir süzgeç fonksiyonu

$$F_{\emptyset}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-\mathbf{i}\emptyset(j-l)} \alpha_{jl} \times \left(\partial_z^j \partial_{\bar{z}}^l k\right)(z)$$

Açılım katsayıları

Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

- Gabor süzgeci,
  - Gauss fonksiyonunun karmaşık bir sinüs dalgasıyla çarpımından elde edilmektedir
  - Kenar gibi imge özniteliklerinin etkili bir şekilde çıkartılması işleminde kullanılmaktadır

$$k(z) = e^{-z\bar{z}}$$

$$F_u^{Gabor}(z) = T_u \bar{T}_{-\bar{u}} e^{-z\bar{z}} = e^{-(z+u)(\bar{z}-\bar{u})}$$

$$= e^{-z\bar{z}+z\bar{u}-u\bar{z}+u\bar{u}}$$

Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

- Gabor süzgeci, $\Im(z) = 1/2\mathbf{i} \times (z - \bar{z})$ alınırsa,

$$F_u^{Gabor}(z) = e^{u\bar{u}} e^{-\mathbf{i}2\Im(u\bar{z})} e^{-z\bar{z}}$$

Süzgecin döndürme yönünü ve şeklini belirler:
Gerçel değer olursa, sadece süzgecin şekli belirlenir.

Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

- Gabor süzgeci,

$$F_{\emptyset}(z) = e^{u\bar{u}} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{jl}\, \partial_z^j\, \partial_{\bar{z}}^l e^{-z\bar{z}}$$

$$= \underbrace{e^{u\bar{u}}}_{} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{u^j\,(-\bar{u})^l}{j!\,l!}\, \partial_z^j\, \partial_{\bar{z}}^l e^{-z\bar{z}}$$

Sabit, ihmal edilebilir.

$$T_u = e^{u\partial_z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \partial_z^j \qquad F_u^{Gabor}(z) = T_u \bar{T}_{-\bar{u}} e^{-z\bar{z}}$$

Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

- 2-boyutlu imgeler için merkezi sonlu farklar yaklaşımı kullanılarak birinci dereceden türev alma işlemi

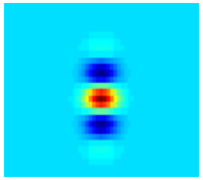
$$Türev\ işleci = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$$

Gabor Süzgeci (İşlem Adımları)

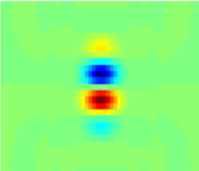
- İmge Gauss süzgecinden geçirilmekte
- Fourier dönüşümü yaklaşımı kullanılarak ilgili işlemler frekans bölgesinde yapılmakta
- Ters Fourier dönüşümü yardımıyla süzgeçlenmiş imge elde edilmekte
- İmgenin açılım katsayılarına bağlı olarak karmaşık türevleri hesaplanırken aynı zamanda bu değerler α_{il} katsayılarıyla çarpılmaktadır.
- Süzgecin çıkışından elde edilen
  - sanal kısmın maksimum değerli konumlarından imgenin kenar öznitelikleri elde edilir
  - gerçel kısmın maksimum değerli konumlarından ise imgedeki çizgi öznitelikleri açığa çıkmaktadır

Gabor Süzgeci

(a)



(b)



(c)

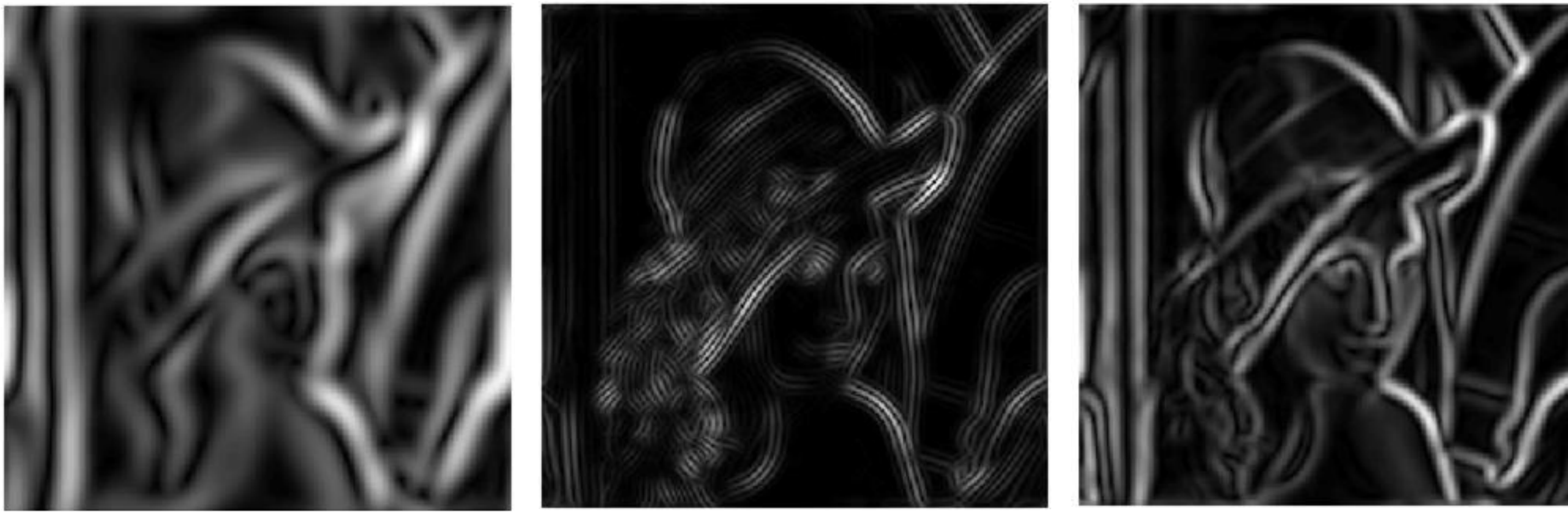
Temel Gauss süzgecinin genişliği 3, süzgecin şeklini belirleyen parametre $u = 2$ ve $N = 12$ alındığında elde edilen Gabor süzgecine ait fonksiyonun sanal ve gerçel kısımları ve Lena test imgesi için elde edilen sonuçlar

(d)

(e)

a) Lena test imgesi. Gabor süzgeci: Süzeç fonksiyonun b) gerçel kısmı ve c) sanal kısmı. Süzgecin çıkışı: d) gerçel kısım ve e) sanal kısım.

Gabor Süzgeci



farklı parametre değerlerine bağlı olarak süzgeç çıkısının sanal kısmı

Yönlendirilebilir Süzgeçlerin Karmaşık Çözümlemesi

Teşekkürler...

Sorular ?